

Lösungstabelle für

Inhomogene Gleichungen vom Typ $y' + a \cdot y = g(x)$

Linear und mit konstanten Koeffizienten)

Ausführliche Beschreibung und Beispiele im Text 53002

Die allgemeine Lösung der DGL ist die Summe aus der allgemeinen homogenen DGL und einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL: $y(x) = y_o(x) + y_p(x)$

1. Schritt: Allgemeine Lösung der homogenen DGL $y' + \boxed{a} y = 0$: $y_o(x) = c \cdot e^{-\boxed{a}x}$

2. Schritt: Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL $y_p(x)$ mit Lösungsansatz entsprechend der Störfunktion g:

Fall	Die Störfunktion g(x) ist		Lösungsansatz	Beispiel
(1)	ein Polynom von Grad 1:		$y_p(x) = Cx + D$	B16
	ein Polynom von Grad 2:		$y_p(x) = Dx^2 + Ex + F$	B17
(2)	e^{ax} : $y' + \boxed{b} \cdot y = e^{\boxed{a}x}$	Ist $a + b \neq 0$:	$y_p = C \cdot e^{ax}$	B19
		Ist $a + b = 0$:	$y_p(x) = k \cdot x e^{a \cdot x}$	B20
(3)	$a \cdot \sin(\omega x)$, $b \cdot \cos(\omega x)$		$y_p(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	B27
(4)	$y' + \boxed{b} \cdot y = e^{\boxed{a}x} + cx$	Ist $a + b \neq 0$	$y_p(x) = x e^{ax} + (Bx + C)$	B25
	$y' + \boxed{b} \cdot y = x e^{\boxed{a}x}$	Ist $a + b \neq 0$	$y_p(x) = x e^{ax} \cdot (Bx + C)$	B26
	$y' + y = 2x \cdot \sin(x)$		$y_p(x) = x \cdot (a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x)) + (c \cdot \sin(x) + d \cdot \cos(x))$	B30
	$y' - 4y = e^{2x} + 10 \sin(2x)$		$y_p(x) = k \cdot e^{2x} + a \cdot \sin(2x) + b \cdot \cos(2x)$	B31

Für andere Arten von DGL 1. Ordnung gibt es diese oft anwendbaren Lösungsmethoden:

Trennung der Variablen:

Man bringt die DGL in die Form $r(y) \cdot dy = s(x) \cdot dx$

und integriert dann auf beiden Seiten.

Text 53001

Dabei hilft oft eine Substitution.

Variation der Konstanten

Man löst die homogene Gleichung zu $y_o = C \cdot r(x)$

und ersetzt dann die Konstante durch eine Funktion $C(x)$.

Dann setzt man in die DGL ein ... **Text 53002**

B7

Lösungstabelle für Inhomogene Gleichungen vom Typ $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = g(x)$

Linear und mit konstanten Koeffizienten)

Ausführliche Beschreibung und Beispiele im Text 53005

1. Schritt: Lösung der homogenen Gleichung über die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

1. Fall: Zwei reelle Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y(x) = k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. Fall: Genau eine Lösung λ :

$$y(x) = (k_1 + k_2 x) \cdot e^{\lambda x}$$

3. Fall: Zwei komplexe Lösungen $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \omega i$:

$$y(x) = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x))$$

2. Schritt: Partielle Lösung der inhomogenen Gleichung je nach Störfunktion bestimmen.

	Die Störfunktion $g(x)$ ist		Lösungsansatz	Beispiel
[SF0]	Polynom von Grad 0	Ist $b \neq 0$:	$y_p(x) = C$	B11 bis 13
		Ist $b = 0$:	$y_p(x) = Dx + E$	B14
[SF1]	Polynom von Grad 1:	Ist $b \neq 0$:	$y_p(x) = Cx + D$	B15 bis 17
		Ist $b = 0$:	$y_p(x) = Dx^2 + Ex + F$	B18
		Ist $a = b = 0$	zweimal integrieren	B19
[SF2]	Polynom von Grad 2:	Ist $b \neq 0$:	$y_p(x) = Dx^2 + Ex + F$	B20 bis 23
		Ist $b = 0$:	$y_p(x) = Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$	B24
[SF – e]	eine e-Funktion	Ist $m \neq \lambda_{1,2}$	$y_p = C \cdot e^{mx}$	B25 bis 28
		Ist $m = \lambda_1$ oder λ_2	$y_p(x) = Cx \cdot e^{mx}$	B29 bis 30
		Ist $m = \lambda_1 = \lambda_2$	$y_p(x) = Cx^2 \cdot e^{mx}$	B31
[SF – sin]	$a \cdot \sin(\omega x)$ oder [SF – cos] $b \cdot \cos(\omega x)$			
		Ist $i\omega \neq \lambda_{1,2}$	$y_p(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	B32 bis 34
		Ist $i\omega = \lambda_1$ oder λ_2	$y_p(x) = x \cdot [A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)]$	B35
[SF – Sum]		Ist y_p = Summe aus 2 Funktionen: Trennen!		B36 bis 40
[SF – Pr d]		Ist y_p = Produkt aus 2 Funktionen: Trennen		B41 bis 43

3. Schritt: Die allgemeine Lösung der DGL ist dann die Summe aus der Lösung der homogenen DGL und der partiellen Lösung der inhomogenen DGL.